Corrigé

1. $y' + 0{,}15y = 4{,}5 \Leftrightarrow y' = -0{,}15y + 4{,}5$

$$\Leftrightarrow y(t) = Ce^{-0{,}15t} - \frac{4{,}5}{-0{,}15}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = Ce^{-0{,}15t} + 30, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

2. $f(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^0 + 30 = 0 \Leftrightarrow C = -30$

Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = -30e^{-0{,}15t} + 30$.

3. $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}15t = -\infty$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}15t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 30$.

À partir d'un certain temps, la résistance à la compression de la dalle de béton est d'environ 30 MPa.

4. $f(t) \geqslant 12 \Leftrightarrow -30e^{-0{,}15t} + 30 \geqslant 12 \Leftrightarrow -30e^{-0{,}15t} \geqslant -18$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}15t} \leqslant \frac{18}{30} \Leftrightarrow e^{-0{,}15t} \leqslant \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-0{,}15t}) \leqslant \ln\left(\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow -0{,}15t \leqslant \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow t \geqslant -\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{0{,}15}.$$

On a utilisé le fait que la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

De plus, $-\dfrac{\ln(0{,}6)}{0{,}15} \approx 3{,}41$, c'est donc après quatre jours de séchage qu'il sera possible de marcher sur la dalle.

38 **1. a.** $f(0) = 4$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

c.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	1

d. $f'(0) = -6$.

2. a. On résout l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

$y' + 2y = 2 \Leftrightarrow y' = -2y + 2 \Leftrightarrow y(x) = Ce^{-2x} - \dfrac{2}{-2}$

$$\Leftrightarrow y(x) = Ce^{-2x} + 1, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a :

$$f(0) = 4 \Leftrightarrow Ce^0 + 1 = 4 \Leftrightarrow C = 3\,.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 3e^{-2x} + 1$.

b. $f(0) = 3e^0 + 1 = 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

$f'(x) = 3 \times (-2) \times e^{-2x} = -6e^{-2x}$

Pour tout réel x, $f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$f'(0) = -6e^0 = -6$